



UNIVERZITET U NIŠU
FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU



OSNOVI MAŠINSTVA

- PREZENTACIJA BR. 15 -

Dr Darko Mihajlov, vanr. prof.

SADRŽAJ PREZENTACIJE

ČISTO SAVIJANJE

- ♦ Osnovni pojmovi i pretpostavke u slučaju čistog savijanja;
- ♦ Deformacija usled čistog savijanja;
- ♦ Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja.
- ♦ Dimenzionisanje poprečnog preseka štapa koji je opterećen na čisto savijanje.



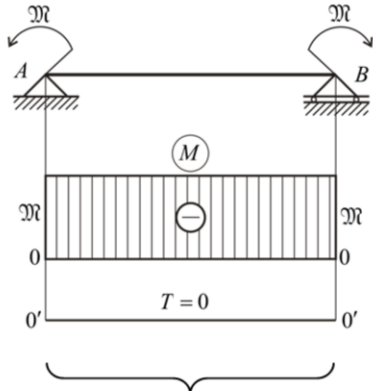
POPREČNO SAVIJANJE

- ♦ Osnovni pojmovi i pretpostavke u slučaju poprečnog savijanja;
- ♦ Deformacija usled poprečnog savijanja;
- ♦ Normalni napon u slučaju poprečnog savijanja;
- ♦ Tangencijalni napon u slučaju poprečnog savijanja;
- ♦ Dimenzionisanje poprečnog preseka štapa koji je opterećen na poprečno savijanje.

ČISTO SAVIJANJE

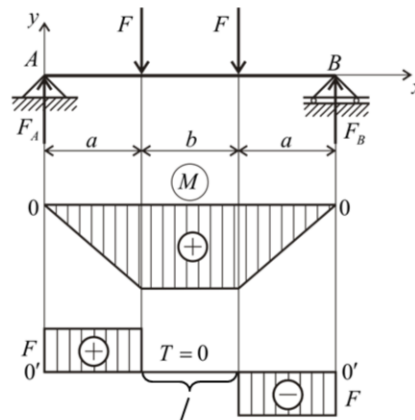
Osnovni pojmovi i pretpostavke

Čisto savijanje proste grede opterećene spregovima sila jednakih momenata nad osloncima



$$T = 0, N = 0, M \neq 0; \quad \frac{dM}{dx} = T = 0 \Rightarrow M = \text{const.}$$

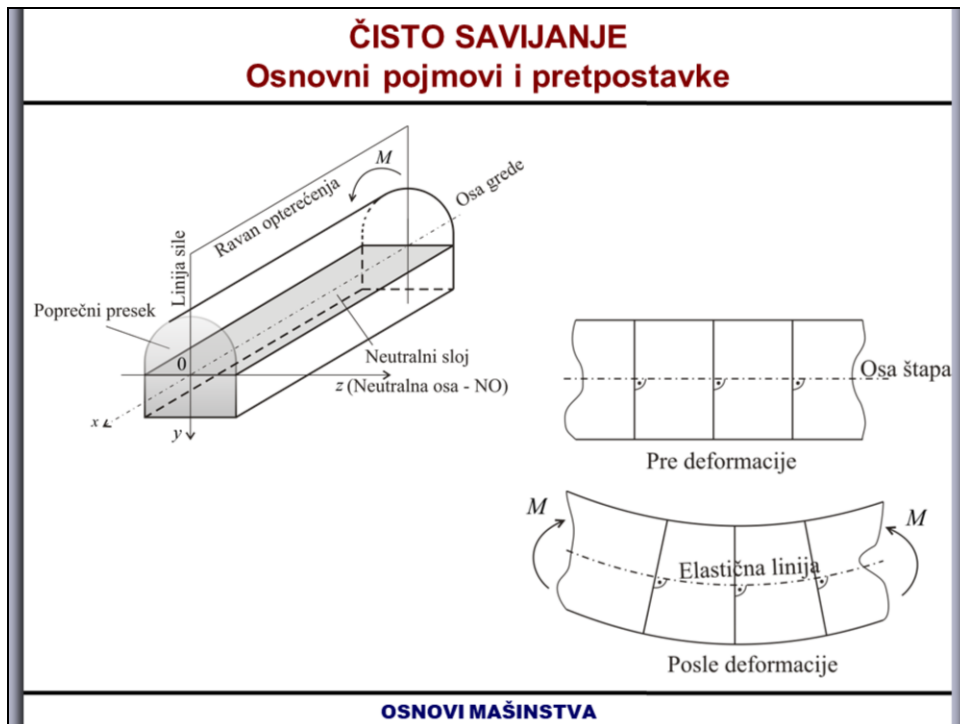
Čisto savijanje proste grede opterećene koncentrisanim silama jednakih intenziteta, simetrično (čisto savijanje u polju b)



OSNOVI MAŠINSTVA

Čisto savijanje je naprezanje štapa pod dejstvom spoljašnjih spregova sila jednakih momenata i suprotnih smerova, ili naprezanje štapa pod simetričnim dejstvom koncentrisanih sila jednakih intenziteta u ravni koja prolazi kroz podužnu osu štapa.

Čisto savijanje je takav slučaj naprezanja štapa kada je u poprečnim presecima štapa glavni vektor jednak **nuli**, a glavni moment ima **konstantnu vrednost**. Zbog diferencijalne zavisnosti između momenta i transverzalne sile, ako je transverzalna sila jednaka nuli, tada napadni moment ima konstantnu vrednost.

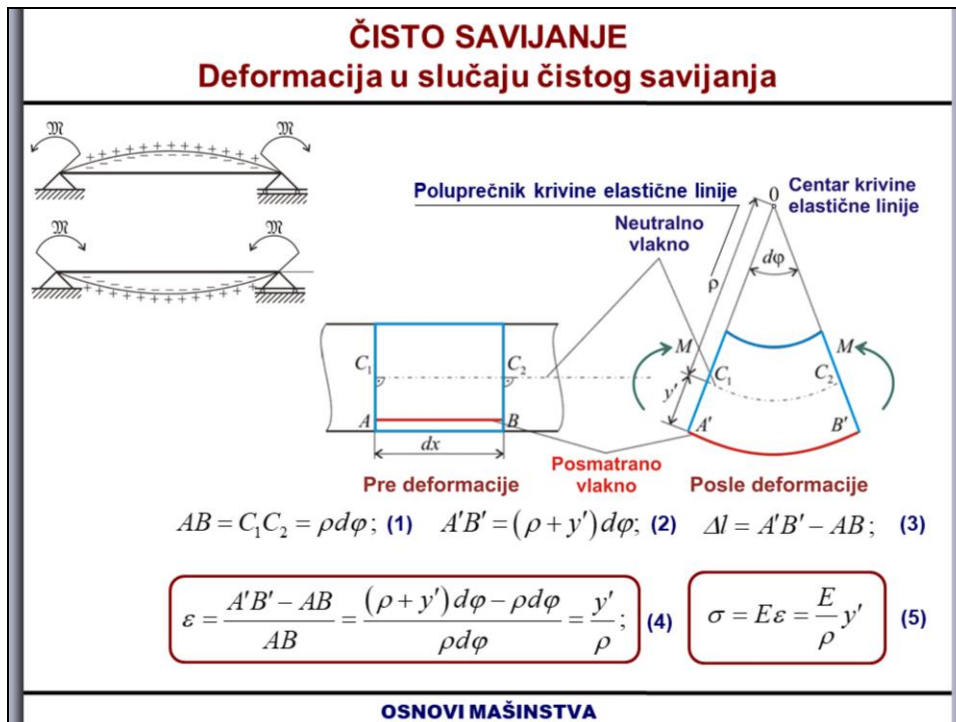


Izučavanje naponskog i deformacionog stanja u slučaju čistog savijanja podrazumeva poznavanje sledećih pojmova:

- Ravan opterećenja je ravan u kojoj leže sve spoljašnje sile;
- Linija sile je linija preseka ravni opterećenja i poprečnog preseka.

Izučavanje naponskog i deformacionog stanja u slučaju čistog savijanja se sprovodi uz pomoć sledećih pretpostavki:

- ✓ Tačke koje se nalaze u ravnima upravnim na osu štapa pre deformacije, ostaju i posle deformacije u ravnima upravnim na deformisanu (savijenu) osu štapa - hipoteza ravnih preseka (Bernulijeva hipoteza).
- ✓ Podužna vlakna ne dejstvuju jedna na druga, tj. zanemaruju se naponi koji dejstvuju bočno na vlakna;
- ✓ Jedna od glavnih centralnih osa inercije leži u ravni opterećenja, tj. linija sile se poklapa sa jednom od glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka štapa.



Posmatra se prosta greda koja je opterećena spregovima sila nad osloncima. U zavisnosti od smera spregova sila, jedna vlakna se izdužuju, a druga skraćuju. Kako je prelaz od izduženih ka skraćenim vlaknima kontinualan, unutar grede mora da postoji sloj vlakana koja ne menjaju dužinu, ali se deformišu, i to tako što se pomeraju u odnosu na prvobitni ravan položaj i iskrivljuju se. Njihova dilatacija je jednaka **nuli**. Ova vlakna se zovu **neutralna vlakna** i ona obrazuju **neutralnu površ** ili tzv. **neutralni sloj**.

Presek neutralne površi sa poprečnim presekom grede zove se **neutralna osa (N.O.)**.

Savijena osa štapa, koja je presek neutralne površi i ravni opterećenja, zove se **elastična linija**.

Dilatacija uočenog vlakna AB , kao relativna promena dužine vlakna, može da se odredi na osnovu geometrijskog uslova i primenom Hukovog zakona.

Metoda preseka: Štap se preseče dvema paralelnim ravnima upravno na njegovu osu na beskonačno malom rastojanju dx i uočimo vlakno AB .

Uočeni element ima posle deformacije savijeni oblik. Preseci su se zaokrenuli za ugao $d\varphi$, a vlakno AB se izdužilo.

Dužina vlakna AB pre deformacije jednaka je dužini neutralnog vlakna C_1C_2 pre i posle deformacije - izraz (1). Dužina vlakna posle deformacije data je izrazom (2). **Apsolutna promena dužine** posmatranog vlakna jednaka je razlici ovih dužina data je izrazom (3).

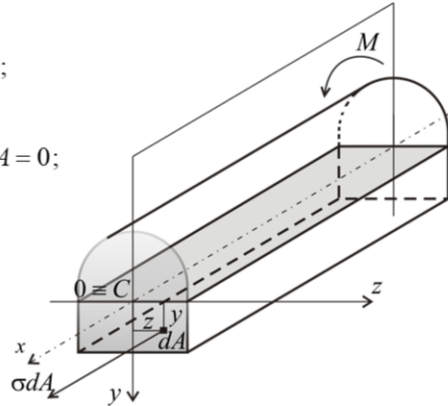
Relativna promena dužine (dilatacija) vlakna data je izrazom (4), a **normalni napon**, po Hukovom zakonu, u ovom slučaju ima oblik kao što je prikazano izrazom (5).

ČISTO SAVIJANJE

Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja

Jednačine ravnoteže spoljašnjih i unutrašnjih sila za posmatrani deo:

1. $\Sigma X = 0: \int_{(A)} \sigma dA = 0;$
2. $\Sigma M_y = 0: \int_{(A)} z \sigma dA = 0;$
3. $\Sigma M_z = 0: M - \int_{(A)} y \sigma dA = 0;$



OSNOVI MAŠINSTVA

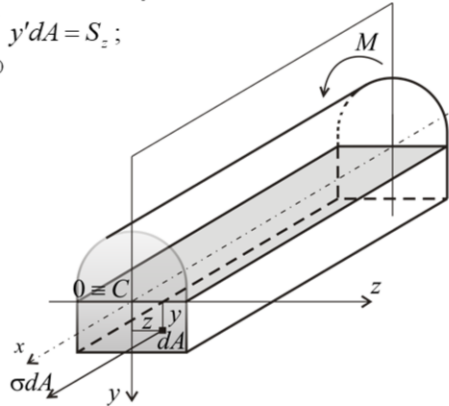
Za određivanje glavnih jednačina čistog savijanja, koje se odnose na **krivinu elastične linije** i **normalni napon**, koristi se Metoda preseka i jednačine ravnoteže spoljašnjih i unutrašnjih sila za posmatrani deo.

ČISTO SAVIJANJE

Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja (1/4)

$$\left. \begin{aligned} 1. \Sigma X = 0: \int_{(A)} \sigma dA = 0 \\ \sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{(A)} \frac{E}{\rho} y' dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_{(A)} y' dA}_{S_z} = \frac{E}{\rho} \cdot S_z = 0 \Rightarrow \boxed{S_z = 0}$$

$$\int_{(A)} y' dA = S_z;$$



OSNOVI MAŠINSTVA

Da bi statički moment za osu z bio jednak nuli, ona mora da bude centralna osa, pa se zaključuje da se težište poprečnog preseka nalazi u koordinatnom početku, tj. $0 \equiv C$.

ČISTO SAVIJANJE

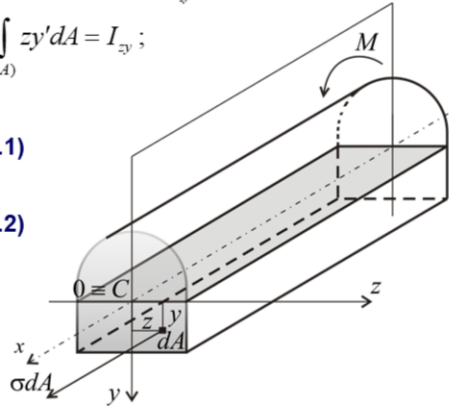
Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja (2/4)

$$2. \Sigma M_y = 0: \left. \begin{array}{l} \int_{(A)} z \sigma dA = 0 \\ \sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y' \end{array} \right\} \Rightarrow \int_A z \cdot \frac{E}{\rho} \cdot y' dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_{(A)} z y' dA}_{I_{zy}} = \frac{E}{\rho} \cdot I_{zy} = 0 \Rightarrow I_{zy} = 0$$

$$\int_{(A)} z y' dA = I_{zy};$$

$$y' = y \Rightarrow \sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y, \quad (2.1)$$

$$y = 0 \Rightarrow \sigma = 0. \quad (2.2)$$



OSNOVI MAŠINSTVA

Centrifugalni moment inercije jednak je nuli ako je bar jedna od osa glavna centralna osa, tako da je osa Oz glavna centralna osa: $Oz \equiv Cz$. Tada je $y' = y$ (izraz 2.1), tako da vlakna ose Cx nisu napreguta: $y = 0$, odnosno $\sigma = 0$ (izraz 2.2).

ČISTO SAVIJANJE

Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja (3/4)

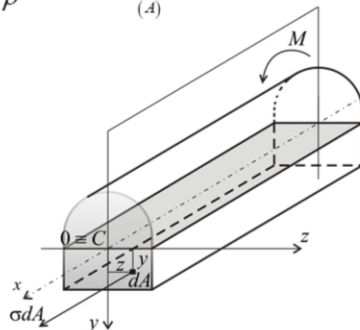
$$\begin{aligned}
 3. \left. \begin{aligned} \Sigma M_z = M - \int_{(A)} y \sigma dA = 0 \\ \sigma = E \varepsilon = \frac{E}{\rho} y' \end{aligned} \right\} &\Rightarrow M - \int_{(A)} y \cdot \frac{E}{\rho} \cdot y dA = M - \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_{(A)} y^2 dA}_{I_{N.O.}} = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow M = \frac{E}{\rho} \cdot I_{N.O.}; \quad \int_{(A)} y^2 dA = I_z = I_{N.O.}
 \end{aligned}$$

prva glavna jednačina savijanja

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} = \frac{M}{\mathfrak{B}}$$

k - krivina elastične linije

$\mathfrak{B} = EI_z$ - **krutost pri savijanju**
(svojna krutost) [Nm²]



OSNOVI MAŠINSTVA

Poluprečnik krivine elastične linije ρ je u slučaju čistog savijanja direktno proporcionalan aksijalnom momentu inercije i modulu elastičnosti, a obrnuto proporcionalan momentu savijanja, pa se štap **manje savija** ako su modul elastičnosti i aksijalni moment **veći**, a napadni moment **manji**.

Ako je štap konstantnog poprečnog preseka i od istog materijala, a napadni moment je inače konstantan, tada je poluprečnik krivine elastične linije konstantan i elastična linija je **kružni luk**.

ČISTO SAVIJANJE

Glavne jednačine u slučaju čistog savijanja (4/4)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{E}{\rho} \cdot y \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y} \\ k = \frac{1}{\rho} &= \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y} \quad - \text{ druga glavna jednačina savijanja}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max}; \quad \sigma_{\min} = \frac{M}{I_z} y_{\min};$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} h_1 = \frac{M}{W_1};$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{M}{I_z} h_2 = \frac{M}{W_2}$$

Dijagram normalnog napona u poprečnom preseku štapa pri čistom savijanju

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \frac{I_z}{h_1} \\ W_2 &= \frac{I_z}{h_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Otporni momenti} \\ \text{preseka u odnosu na} \\ \text{krajnja vlakna [cm³]} \end{array}$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Druga glavna jednačina savijanja pokazuje **linearnu zavisnost** normalnog napona od rastojanja posmatrane tačke od neutralne ose.

Normalni napon se menja **linearno** po preseku u zavisnosti od rastojanja vlakna od neutralne ose, a na neutralnoj osi je jednak **nuli**.

Normalni napon je proporcionalan napadnom momentu i obrnuto proporcionalan aksijalnom momentu inercije poprečnog preseka za neutralnu osu. Dijagram napona je u svim presecima isti ako je štap konstantnog poprečnog preseka i od istog materijala.

Ekstremne vrednosti normalnog napona se javljaju u tačkama koje su na najvećem rastojanju od neutralne ose.

Za manje vrednosti otpornog momenta veća je vrednost normalnog napona i obrnuto. Najveći napon po apsolutnoj vrednosti nastaje u vlaknu koje je na najvećem rastojanju od neutralne ose, te se zbog toga za određivanje najvećeg napona koristi izraz za najmanji otporni moment: $W_{z,\min} = I_z / h_{\max}$.

Otporni moment površine preseka predstavlja količnik momenta inercije te površine u odnosu na neutralnu osu i rastojanja maksimalno udaljenog vlakna od neutralne ose: $W_{N.O.} = I_{N.O.} / h_{\max}$.

Dimenzionisanje poprečnog preseka štapa koji je opterećen na čisto savijanje

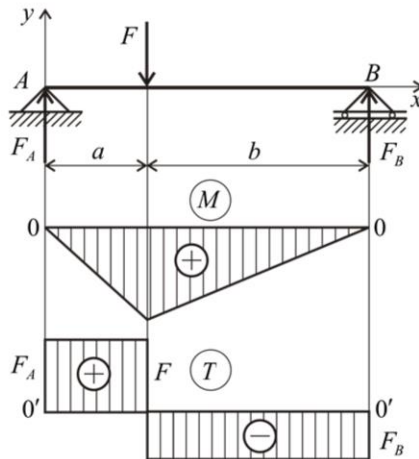
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} \leq \sigma_{df} \Rightarrow W_z \geq \frac{M}{\sigma_{df}}$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Dimenzionisanje poprečnog preseka štapa koji je opterećen na čisto savijanje vrši se na osnovu uslova da najveća vrednost normalnog napona bude manja od dozvoljene vrednosti normalnog napona koji zavisi od vrste materijala.

POPREČNO SAVIJANJE

Osnovni pojmovi i pretpostavke



Poprečno savijanje proste grede opterećene koncentrisanom silom

$$T \neq 0; \quad N = 0; \quad M \neq 0.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

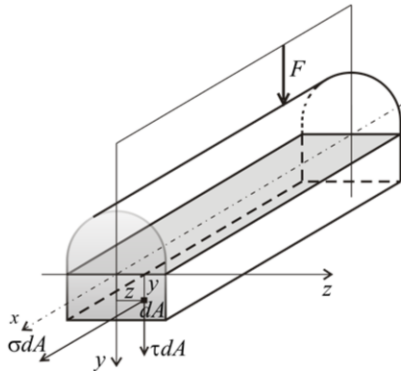
Poprečno savijanje (savijanje silama) je slučaj savijanja izazvan silama čije su napadne linije **upravne** na podužnu osu grede (poprečne sile).

Poprečno savijanje je takav slučaj naprezanja pri kome u poprečnim presecima grede glavni vektor unutrašnjih sila leži u ravni poprečnog preseka. Glavni moment unutrašnjih sila nije jednak nuli, a nije ni konstantan.

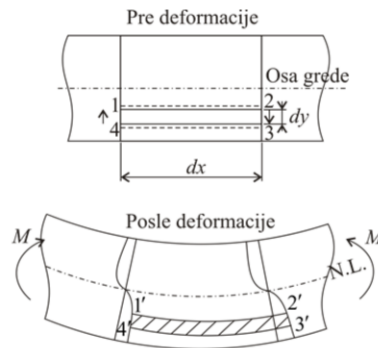
Na osnovu diferencijalne zavisnosti između napadnog momenta i transverzalne sile, sledi da ako je transverzalna sila različita od nule, onda je i glavni moment različit od nule i njegova funkcionalna zavisnost od koordinate duž ose grede je za jedan stepen veća od funkcionalne zavisnosti transverzalne sile.

POPREČNO SAVIJANJE

Deformacija u slučaju poprečnog savijanja



Metoda preseka - unutrašnje elementarne sile u poprečnom preseku štapa u slučaju poprečnog savijanja



Deformacija elementarnog dela grede usled poprečnog savijanja

OSNOVI MAŠINSTVA

U poprečnim presecima grede u slučaju poprečnog savijanja nastaju **napadni moment M** i **poprečna sila T** .

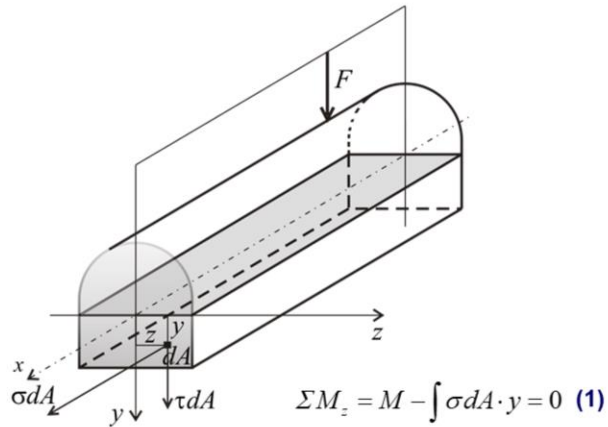
Usled nastanka napadnog momenta M , u preseku grede se javlja **normalni napon**.

Poprečna sila T predstavlja rezultantu neprekidno raspoređenih elementarnih unutrašnjih sila koje leže u ravni poprečnog preseka. One izazivaju u poprečnom preseku grede pojavu **tangencijalnog (smičućeg) napona**.

Tangencijalni naponi izazivaju **ugaonu deformaciju (klizanje)** svakog elementa poprečnog preseka. Pošto su tangencijalni naponi neravnomerno raspoređeni po preseku, to je i ugaona deformacija neravnomerno raspoređena po preseku. Za razliku od čistog savijanja, **kod poprečnog savijanja se poprečni preseci krive**, ne ostaju ravni. Teorijska i eksperimentalna ispitivanja su pokazala da je uticaj klizanja na dilataciju neznatan, pa se uticaj klizanja pri analizi normalnog napona može zanemariti.

POPREČNO SAVIJANJE

Normalni napon u slučaju poprečnog savijanja (1/2)



*Metoda preseka - unutrašnje elementarne sile u
poprečnom preseku štapa u slučaju poprečnog savijanja*

OSNOVI MAŠINSTVA

Normalni napon se za slučaj poprečnog savijanja određuje na isti način kao i kod čistog savijanja.

Prva i druga glavna jednačina čistog savijanja se primenjuju u istom obliku i za slučaj poprečnog savijanja.

Jednačina ravnoteže za moment sile za osu z , gde je sa M obeležen moment spoljašnje sile F za dati presek, data je izrazom (1).

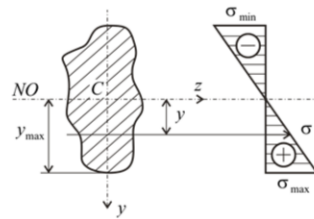
POPREČNO SAVIJANJE

Normalni napon u slučaju poprečnog savijanja (2/2)

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_z = M - \int_{(A)} \sigma dA \cdot y = 0 \\ \sigma = \frac{E}{\rho} y \end{aligned} \right\} \Rightarrow M - \int_{(A)} \frac{E}{\rho} \cdot y^2 dA = M - \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_{(A)} y^2 dA}_{I_z} = 0 \Rightarrow$$

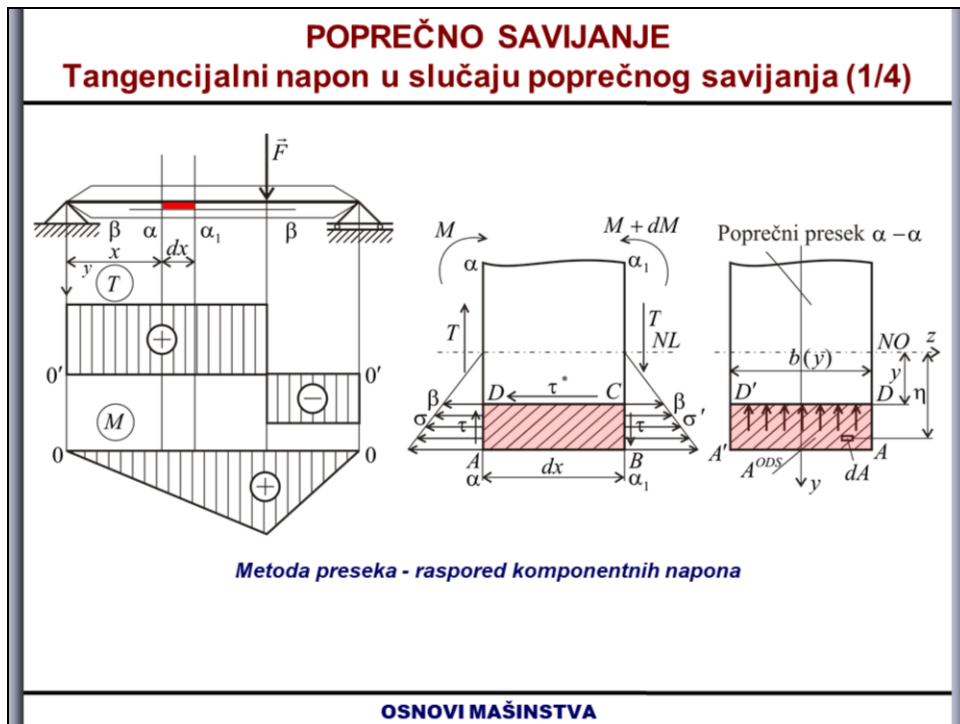
$$\Rightarrow M = \frac{E}{\rho} \cdot I_z \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}} \quad \text{prva glavna jednačina savijanja}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y} \\ k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{M}{I_z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y} \quad \text{druga glavna jednačina savijanja}$$



Dijagram normalnog napona

OSNOVI MAŠINSTVA



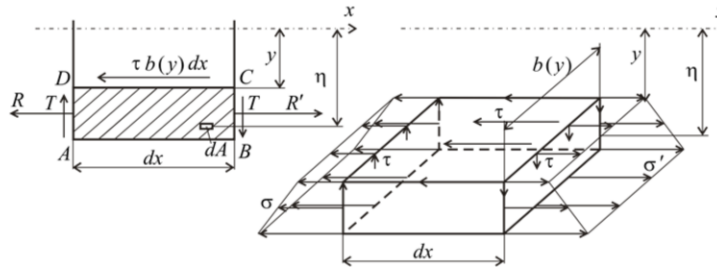
Za određivanje tangencijalnog napona u poprečnom preseku se koriste **Metoda preseka** i sledeće **pretpostavke**:

1. Tangencijalni naponi su jednaki u svim tačkama na istom rastojanju od neutralne ose;
2. Tangencijalni napon je paralelan poprečnoj (transverzalnoj) sili.

Po Metodi preseka se iz grede izdvoji elementarna prizma $ABCD$ tako što se odseče deo između dve poprečne i jedne podužne ravni.

POPREČNO SAVIJANJE

Tangencijalni napon u slučaju poprečnog savijanja (2/4)



Raspored sila i komponentnih napona

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -R + R' - \tau b(y) dx = 0;$$

$$R = \int_{A^{odl}} \sigma dA; \quad R' = \int_{A^{odl}} \sigma' dA;$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Za određivanje izraza za tangencijalni napon u tačkama na istom rastojanju od neutralne ose i u datom poprečnom preseku grede, koristi se uslov ravnoteže o algebarskom zbiru projekcija spoljašnjih i unutrašnjih sila na pravac podužne ose x , kao što je prikazano izrazom na slajdu.

POPREČNO SAVIJANJE

Tangencijalni napon u slučaju poprečnog savijanja (3/4)

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -R + R' - \tau b(y) dx = 0 :$$

$$\left. \begin{aligned} R &= \int_{A^{ods}} \sigma dA; \quad \sigma = \frac{M}{I_z} \eta \Rightarrow R = \frac{M}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA; \\ R' &= \int_{A^{ods}} \sigma' dA; \quad \sigma' = \frac{M'}{I_z} \eta = \frac{M + dM}{I_z} \eta \Rightarrow R' = \frac{M + dM}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA; \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow -\frac{M}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA + \frac{M + dM}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA - \tau b(y) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} &-\frac{M}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA + \frac{M}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA + \frac{dM}{I_z} \int_{A^{ods}} \eta dA - \tau b(y) dx = 0; \\ &S_z^{ods} = S_{N.O.}^{ods} = \int_{A^{ods}} \eta dA; \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{I_z} \cdot S_z^{ods} = \tau b(y) dx \quad \Rightarrow \quad \tau = \underbrace{\frac{dM}{dx}}_{=T} \cdot \frac{S_z^{ods}}{I_z b(y)} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{TS_z^{ods}}{I_z b(y)} = \frac{TS_{N.O.}^{ods}}{I_{N.O.} b(y)}$$

**treća glavna
jednačina savijanja**

OSNOVI MAŠINSTVA

Izraz koji je dobijen na kraju predstavlja **treću glavnu jednačinu savijanja** (formula Žuravskog). Veličina tangencijalnog napona je direktno proporcionalna veličini transverzalne sile u datom preseku i statičkom momentu **odsečene površine** poprečnog preseka za neutralnu osu, a obrnuto proporcionalna aksijalnom momentu inercije poprečnog preseka za neutralnu osu i širini poprečnog preseka b paralelnoj neutralnoj osi, a na rastojanju y od nje.

Odsečena površina predstavlja površinu poprečnog preseka koja se prostire od vlakana u kojima se traži napon i dalje od neutralne ose.

Najveći tangencijalni napon je u poprečnom preseku u kome je najveća transverzalna sila i u vlaknima poprečnog preseka za koji je odnos $S_{N.O.ods}/b(y)$ najveći.

POPREČNO SAVIJANJE

Tangencijalni napon u slučaju poprečnog savijanja (4/4)

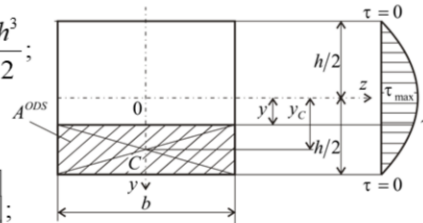
PRIMER: Tangencijalni napon u pravougaonom preseku
u slučaju poprečnog savijanja

$$S_z^{ods} = \int_{A^{ods}} \eta dA = y_c A^{ods} = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) =$$

$$= \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]; \quad b(y) = b; \quad I_z = \frac{bh^3}{12};$$

$$\tau = \frac{T}{bh^3} \cdot \frac{\frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]}{b} = \frac{6T}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right];$$

$$\tau_{max} = (\tau)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A};$$



*Dijagram tangencijalnog napona
pravougaonog preseka*

OSNOVI MAŠINSTVA

Dimenzionisanje poprečnog preseka štapa koji je opterećen na poprečno savijanje

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{df} \Rightarrow W_z \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{df}}$$

OSNOVI MAŠINSTVA

U slučaju poprečnog savijanja se javlja složeno naprezanje s obzirom na to da postoje i normalni i tangencijalni naponi. Tangencijalni napon se u većini slučajeva zanemaruje.

Za dimenzionisanje poprečnog preseka u slučaju poprečnog savijanja se koristi kriterijum kao i u slučaju čistog savijanja – uzima se **najveća vrednost momenta savijanja** i **dozvoljeni napon na savijanje** i sračunava vrednost otpornog momenta savijanja W_z , a na osnovu te vrednosti i jedna dimenzija poprečnog preseka.

Usvaja se prva veća vrednost koja je određena po standardima ili pogodna za izradu preseka štapa.

Kontrolna pitanja 15



1. Objasniti opšte pojmove i pretpostavke u slučaju čistog savijanja.
2. Deformacija u slučaju čistog savijanja.
3. Napisati izraze za prvu i drugu glavnu jednačinu savijanja i objasniti.
4. Objasniti osnovne pojmove i pretpostavke u slučaju poprečnog savijanja.
5. Deformacija u slučaju poprečnog savijanja.
6. Normalni napon u slučaju poprečnog savijanja.
7. Tangencijalni napon u slučaju poprečnog savijanja.
8. Dimenzionisanje poprečnog preseka štapa koji je opterećen na poprečno savijanje.